Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB2
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 2 : Méthode de Newton

On a vu dans le chapitre précédent qu'il n'est pas toujours possible d'avoir des solutions exactes d'équations. On va voir dans celui-ci une méthode qui permet d'approcher assez efficacement les solutions d'une équation : la **méthode de Newton**.

L'idée de la méthode est de partir d'une valeur approchée de la solution et d'en améliorer la précision en itérant un algorithme. L'idée de base, si l'on dispose d'une valeur grossière x_0 de la solution, est de remplacer la courbe de la fonction par sa tangente en x_0. On obtient ainsi un nouveau point x_1, intersection de la tangente avec l'axe des abscisses, et on recommence. Sous certaines conditions, cette suite (x_n) ainsi définie va converger vers la solution.

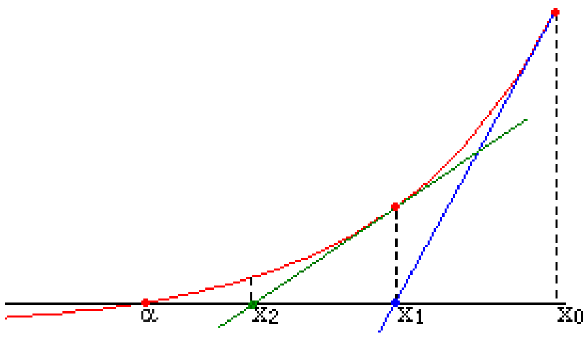

FIGURE 1 – Illustration des premières étapes de l'algorithme [Wikipedia]

1 Description de la méthode

On va maintenant formaliser ce que l'on a expliqué ci-dessus. Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 une approximation grossière de la solution α de l'équation $f(x) = 0$. On peut obtenir un encadrement grossier de α par dichotomie en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, par exemple : si f est continue monotone sur $[a,b]$ et que $f(a)f(b) < 0$, alors $\alpha \in]a,b[$.

La tangente en x_0 à f est donnée par la droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Un calcul rapide montre que l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est le point d'abscisse

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

obtenu simplement en résolvant l'équation (d'inconnue x) $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$.

On pose alors la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \end{aligned}$$

et on définit la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On voit bien sûr que si f' s'annule, on peut avoir un problème. Les résultats suivants vont permettre de préciser les conditions où la méthode s'applique.

Proposition 1

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f'(\alpha) \neq 0$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α et sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

La racine α de f est alors un **point fixe** de φ et $\varphi'(\alpha) = 0$.

"Démonstration".

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)^2 - f(x)^2 + f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}. \end{aligned}$$

Si α est tel que $f(\alpha) = 0$, alors clairement $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\varphi'(\alpha) = 0$. □

Le résultat suivant permet de comprendre sous quelles conditions notre suite récurrente est bien définie, et qu'elle converge bien vers α comme voulu.

Théorème 2

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, et soit $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. (En d'autres termes, α est racine simple de f.)
Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, la suite (x_n) définie plus haut converge vers α, et de plus l'intervalle $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ est stable par φ.

Démonstration. Notons $I = [a, b]$.
f' est continue sur I et $f'(\alpha) \neq 0$, donc il existe un $\delta > 0$ tel que $J := [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$. Il est alors légitime de définir

$$\begin{aligned} \varphi : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. On a alors $\varphi'(\alpha) = 0$ (proposition ci-dessus) et α est un point fixe de φ. Pour finir la preuve, on applique le lemme suivant :

Lemme 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un unique point fixe $\alpha \in]a,b[$. Si $|f'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\eta > 0$ tel que l'intervalle $[\alpha-\eta, \alpha+\eta]$ est stable par f et pour tout $x_0 \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta]$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.

Preuve du lemme : Si $|f'(\alpha)| < 1$, et f' continue, alors il existe $\eta > 0$ tel que $[\alpha-\eta, \alpha+\eta] \in [a,b]$ et $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta]$.
Posons alors $\lambda := \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$. Par le théorème des accroissements finis, on a pour tout $x \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta]$:

$$|f(x)-\alpha| = |f(x)-f(\alpha)| \leq \lambda|x-\alpha| < |x-\alpha| \leq \eta.$$

Donc $f(x) \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta]$ et f est strictement contractante sur cet intervalle. On peut donc appliquer le théorème du point fixe et conclure. □

Comme $\varphi'(\alpha) = 0$, on a bien $|\varphi'(\alpha)| < 1$ et on peut appliquer le lemme à φ, ce qui achève la preuve du théorème. □

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour appliquer la méthode, et fournit une majoration de l'erreur d'approximation.

Théorème 4

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et $f'(x)f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors :

1. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a,b[$.
2. Pour tout $x_0 \in [a,b[$ tel que $f'(x_0)f''(x_0) > 0$, on peut définir la suite (x_n) par

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

   Cette suite est monotone et converge vers α.
3. Notons $m_1 = \inf_{[a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''(x)|$. Une majoration de l'erreur est alors donnée par la formule

$$|x_n - \alpha| \leq (b-a)\left(\frac{b-a}{2}\frac{M_2}{m_1}\right)^{2^n-1}.$$

Démonstration. On peut supposer $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. En effet,

- si $f' < 0$ et $f'' < 0$, on remplace f par $-f$;
- si $f' < 0$ et $f'' > 0$, on remplace f par $x \longmapsto f(-x)$;
- si $f' > 0$ et $f'' < 0$, on remplace f par $x \longmapsto -f(-x)$.

1. f est strictement croissante, puis on utilise le théorème des valeurs intermédiaires ;
2. Comme $f'(x) \neq 0$ pour $x \in [a,b]$, on peut définir φ comme d'habitude. La formule de Taylor à l'ordre 2 appliquée à f entre x et α donne :

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \frac{f''(c_x)}{2f'(x)}, \quad c_x \in]x,\alpha[.$$

Comme f' et $f'' > 0$, on a donc $\varphi(x) - \alpha \geq 0$ et donc $\varphi(x) \geq \alpha \quad \forall x \in [a, b]$.
Comme f est croissante, $f(x) \geq f(\alpha) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$. De plus, $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'x} \leq x$. Ainsi, on a $\alpha \leq \varphi(x) \leq x \quad \forall x \in [a, b]$.
Donc l'intervalle $[\alpha, b]$ est stable par φ et (x_n) est bien définie si $x_0 \in [\alpha, b]$.
Or, on a déjà vu que $x_0 \in [\alpha, b] \Longleftrightarrow f(x_0) > 0 \Longleftrightarrow f(x_0)f''(x_0) > 0$. On a donc

$$\forall n \geq 0, \quad \alpha \leq x_{n+1} = \varphi(x_n) \leq x_n \leq b.$$

Ainsi, la suite (x_n) est décroissante minorée, donc converge vers le point fixe de φ, qui est α.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - \alpha| &= |\varphi(x_n) - \alpha| \\
&= |x_n - \alpha|^2 \left\| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right\| \\
&\leq |x_n - \alpha|^2 \frac{M_2}{2m_1} \\
&\leq (b - a) \left(\frac{b - a}{2} \frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue par une récurrence immédiate.

□

Exemple : On veut chercher les 3 racines de $f : x \longmapsto x^3 - 4x + 1$. La fonction φ à itérer est alors

$$\varphi : x \longmapsto \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}.$$

On prendra :
- $x_0 = -2$ sur $[-3, -1]$ pour la première racine ;
- $x_0 = 0$ sur $[-1, 1]$ pour la deuxième ;
- $x_0 = 2$ sur $[1, 3]$ pour la troisième.

A vous d'itérer φ et de trouver des approximations des racines.

Remarque. *Bien entendu, cette méthode a vocation à être programmée sur ordinateur, il n'y a pas grand intérêt de l'appliquer à la main dans la plupart des cas intéressants. Il est toutefois nécessaire de bien la maîtriser et de savoir l'appliquer à la main sur certains exemples avant de vouloir la programmer.*

2 Applications de la méthode

2.1 Résolution d'équations

On considère une équation $h(x) = g(x)$ pour $x \in [a, b]$. Il suffit alors de poser $f(x) = h(x) - g(x)$ et de chercher des solutions de $f(x) = 0$ avec la méthode de Newton.

2.2 Calcul approché de racines

Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche à approximer $\sqrt{a}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 - a$. On applique la méthode de Newton à f.

Exemple : Approximons $\sqrt{3}$.
On pose $f : x \longmapsto x^2 - 3$ sur $[1, 3]$. $\sqrt{3}$ est une racine simple de f. Vous vérifierez que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right).$$

On part de $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned}
&x_0 = 2\\
&x_1 = \varphi(x_0) = 1,75\\
&x_2 = \varphi(x_1) \approx 1,732142857\\
&x_3 = \varphi(x_2) \approx 1,732050810\\
&x_4 = \varphi(x_3) \approx 1,732050808\\
&x_5 = x_4.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu $\sqrt{3} \approx 1,732050808$.

On peut faire la même chose pour approximer une racine p-ème, pour $p > 1$ entier. Si $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f : x \longmapsto x^p - a$. On utilise alors la suite définie pour $n \leq 0$ par :

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right).$$

Essayez sur quelques exemples...

2.3 Approximation de l'inverse d'un réel

Soit a un réel non nul. On souhaite approcher $\frac{1}{a}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x} - a$, et on va appliquer la méthode de Newton à f.

Exemple : Calculons une valeur approchée de l'inverse de 7, sur l'intervalle $[0.1, 1]$. Vous vérifierez que

$$\varphi(x) = x(2 - 7x).$$

On itère cette fonction en partant de 0.1 :

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0.1\\
&x_1 = \varphi(x_0) = 0.13\\
&x_2 = \varphi(x_1) \approx 0.1417\\
&x_3 = \varphi(x_2) \approx 0.14284777\\
&x_4 = \varphi(x_3) \approx 0.1428571422\\
&x_5 = \varphi(x_4) \approx 0.1428571429\\
&x_6 = x_5.
\end{aligned}$$

On a donc trouvé $\frac{1}{7} \approx 0.1428571429$.

TD 2 : Méthode de Newton

Exercice 1

En utilisant $x \longmapsto \sin(x)$ sur le segment $[2, 4]$, essayer d'estimer π.

Exercice 2 (Estimation d'inverses)

En utilisant $f(x) = \frac{1}{x} - c$, $c > 0$, calculer les premiers termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée qui approche $\frac{1}{c}$ dans les cas suivants :

1. $c = 9$ avec $x_0 = \frac{1}{10}$.
2. $c = 11$ avec $x_0 = \frac{1}{10}$.
3. $c = 5$ avec $x_0 = \frac{1}{10}$.

Exercice 3 (Estimation de racines carrées)

En utilisant $f(x) = x^2 - c$, $c > 0$, calculer les premiers termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée qui approche $\sqrt{c}$:

1. $c = 10$ avec $x_0 = 3$.
2. $c = 5$ avec $x_0 = 2$.
3. $c = 5$ avec $x_0 = 3$.

Estimer l'erreur.

Exercice 4 (Estimation de racines quatrièmes)

En utilisant $f(x) = x^4 - c$, $c > 0$, calculer les premiers termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée qui approche $\sqrt[4]{c}$:

1. $c = 10$ avec $x_0 = \frac{3}{2}$.
2. $c = 5$ avec $x_0 = 1$.
3. $c = 5$ avec $x_0 = \frac{7}{5}$.

Estimer l'erreur.

Exercice 5

L'objectif de cet exercice est d'approximer sur $\mathbb{R}_+^*$ la solution de $x = -\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation admet une solution unique sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Trouver une approximation de la solution avec la méthode de Newton. Bien choisir l'intervalle et donner la précision.

Exercice 6

1. Appliquer la méthode de Newton sur $g(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $I = [0, 0.5]$ (cf. Exercice 1.2 feuille précédente).
2. Appliquer la méthode de Newton sur $g(x) = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2}) - x$ sur $I = [0, 1]$ (cf. Exercice 1.3 feuille précédente).